Les Nombres : Ensembles et intervalles

I. Les Nombre :

A. Les entiers :

Définition : Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,\dots\}$$

Définition : Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\dots\}.$$

Rappel : Le symbole $\in$ désigne l'**appartenance** et $\notin$ désigne la **non-appartenance** à un ensemble.

Exemple :

$1 \in \mathbb{N}$	$1 \in \mathbb{Z}$	1 *appartient à la fois à* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$.
$45678 \in \mathbb{N}$	$45678 \in \mathbb{Z}$	*De même pour 45678.*
$-27 \notin \mathbb{N}$	$-27 \in \mathbb{Z}$	-27 *appartient à l'ensemble des nombres entiers relatifs mais pas à celui des nombres entiers naturels.*

Remarque : On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est **inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

B. Les décimaux et rationnel :

Définition : Un **nombre décimal** est un nombre qui s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple :

$1 \in \mathbb{D}$ $\quad$ $6{,}62607015 \in \mathbb{D}$

$3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582 \in \mathbb{D}$

$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ $\quad$ *En effet* $\frac{1}{3}$ *(*$\approx 0{,}3333333333$ *...) possède une infinité de nombre après*

$\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ $\quad$ *la virgule donc n'appartient pas à* $\mathbb{D}$ *mais* $\frac{3}{4} = 0{,}75$ *à un nombre fini de chiffres après la virgule et donc appartient à* $\mathbb{D}$

Démonstration (Programme) : Montrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. (Par l'absurde)

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Alors on peut l'écrire sous la forme d'une fraction d'un entier et d'une puissance de 10.
Soit $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^k}$ tel que a soit un entier et k un entier naturel.

Donc $10^k = 3a$, ce qui veut dire que 10^k est divisible par 3, ce qui est ***ABSURDE*** **!**

Donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Définition : Un **nombre rationnel** est une fraction, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire sou la forme $\frac{a}{b}$ $avec\ a \in \mathbb{Z}\ et\ b \in \mathbb{Z}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque : On note l'ensemble $\mathbb{E}$ privé de 0 : $\mathbb{E}\backslash\{0\} = \mathbb{E}^*$. Donc $b \in \mathbb{Z}^*$ signifie que b vaut n'importe quel entier relatif **SAUF** zéro.

Exemple :

$-\frac{9}{4} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $0 \in \mathbb{Q}$ $\quad$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

C. Les réels :

Définition : Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire à l'aide d'une fraction.

Exemple :

$\sqrt{2}$ est irrationnel tout comme π ou e ($\approx 2{,}718\ldots$)

Démonstration (Programme) : Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. (Par l'absurde)

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, de plus supposons a et b premier entre eux (de façon que ce soit une fraction irréductible).

Alors on a $2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$. On en déduit que a^2 est pair et donc a est pair.
Car si a était impaire, alors a^2 le serait aussi. (« Si a est impaire alors a^2 est impaire » est une démo au programme aussi)

Comme a est paire alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.

Donc $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$,
donc $4k^2 = 2b^2$, par simplification on a $b^2 = 2k^2$ donc b est pair.

Or a et b sont premier entre eux, donc ils ne peuvent pas tous les deux êtres pairs **!**
C'est donc ***ABSURDE*** **!**

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, il est donc irrationnel.

Remarque : Il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. Les décimales qui le constituent sont en nombre infini et se suivent sans suite logique.

Définition : Un **nombre réel** est un nombre rationnel ou irrationnel.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

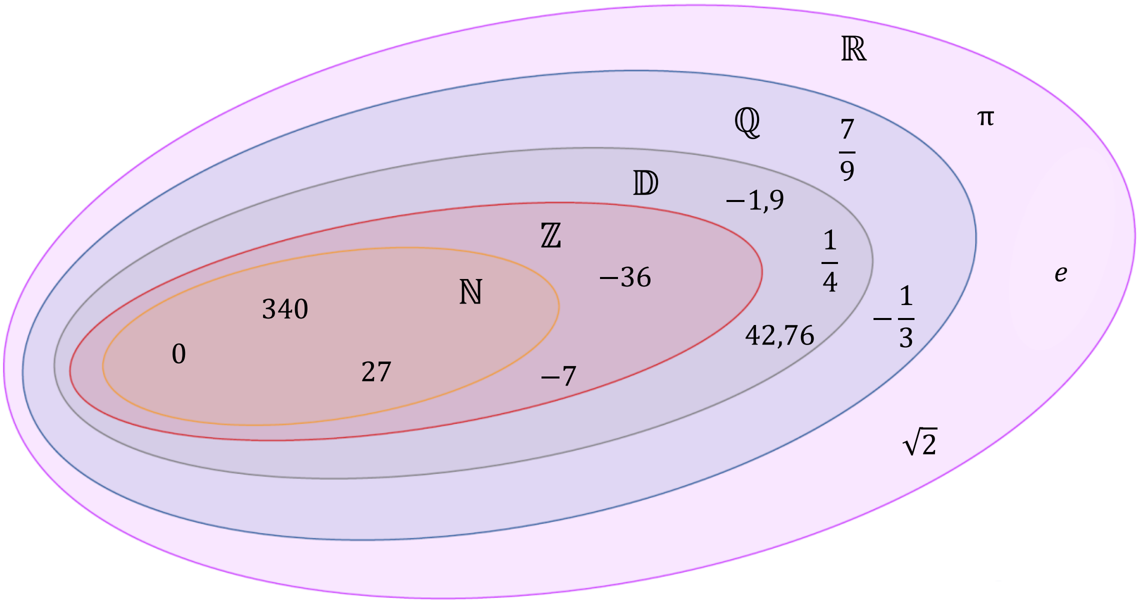
Exemple :

$1 \in \mathbb{R}$ $\quad$ $1{,}45 \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\pi \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\frac{4}{31} \in \mathbb{R}$

Remarque : $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres que l'on utilise en classe de seconde.

Remarque : on peut représenter les ensembles sous la forme d'un diagramme nommé : Diagramme de Venn.

Exemple :



Remarque : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

II. Les Intervalles :

A. Définition :

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$.

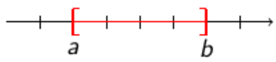
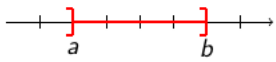
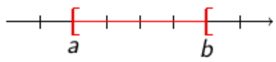
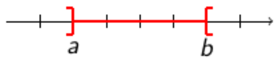
- On appelle **intervalle ouvert** $]a;b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.
- On appelle **intervalle fermé** $[a;b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.

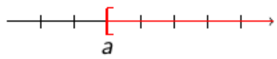
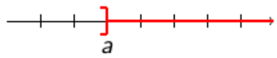
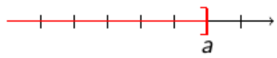
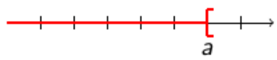
Exemple :

$[-5;10]$ est un intervalle comprenant tous les nombres réels entre -5 et 10 inclus.

$]12;34[$ est un intervalle comprenant tous les nombres réels entre 12 et 34 exclus.

Les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$:

Intervalle	Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a, b]$	$a < x \leq b$	
$[a, b[$	$a \leq x < b$	
$]a, b[$	$a < x < b$	

Intervalle	Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique
$[a, +\infty[$	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty; a]$	$x \leq a$	
$]-\infty, a[$	$x < a$	

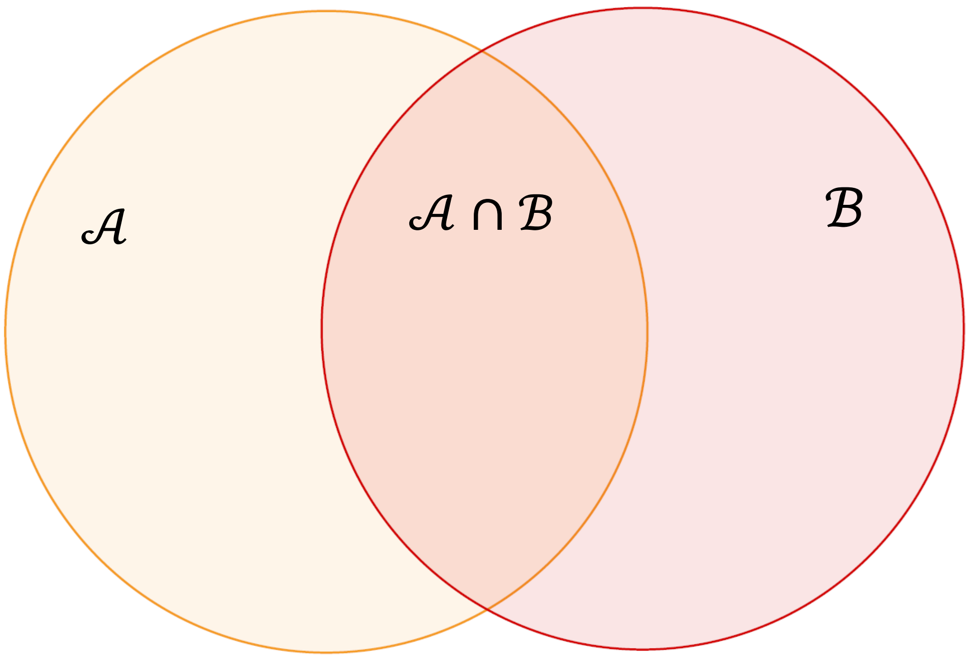
Remarque : $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$ Le symbole ∞ est l'infini.

B. Réunion et intersection :

Définitions :

- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B et se note $A \cap B$.
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B et se note $A \cup B$.

Schéma d'exemple :



Le tout c'est $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

Exemple :

$[-4\,;16] \cup [6\,;32[\ = [-4\,;32[$

$[-234\,;57] \cap [-34;27[\ = [-34;27[$

$]11;44] \cap [-13;16] =]11;16]$

$\mathbb{R} \cup \mathbb{E} = \mathbb{R}$